# 水理学 I 小テスト (2002.11.12)

**問題 1**　以下の $\boxed{\mathrm{A}}$ ～ $\boxed{\mathrm{L}}$ を適切に埋める言葉あるいは式を答えよ。

空間座標を、$(x,y,z)$ の直交座標で取り、それぞれの方向の速度を $(u,\, v,\, w)$ とした場合に、非圧縮性流体の連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

と表される。また、$z$ 座標を鉛直方向とした時に、一定の重力加速度 $g$ のもとでの運動方程式は、粘性を無視すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g
\end{aligned}$$

速度ポテンシャル $\phi$ は、速度 $(u,\, v,\, w)$ が 渦度 を持たない時に定義され、$\phi$ を使って $(u,\, v,\, w)$ は、

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

と表される。

渦度 $\omega$ は $\mathrm{rot}\mathbf{u}$ と定義される。$\omega$ の $z$ 成分 $\omega_z$ は、$u,\, v$ を使って $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}$ と表される。

渦無しの流れの場合には、ベルヌーイの定理は時間変化を含む形に拡張され、速度ポテンシャル $\phi$ を使って、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathrm{grad}\phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{一定}$$

となる。

流線関数 $\psi$ は、２次元流に対して

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

と定義され、$\psi =$ 一定値 を満たす $(x,\, y)$ からなる線は流線となる。

複素速度ポテンシャル $W$ は非圧縮非粘性流体の２次元非回転流に対して

$$W = \phi + i\psi$$

と定義され、コーシー・リーマンの関係式を満たし複素微分可能な複素関数である。

**問題 2**　以下の問で与えられる速度ポテンシャル、あるいは流線関数、複素速度ポテンシャルの表す流れの場（２次元とする）の点 $(x,\, y)$ における流速 $(u,\, v)$ の値を求め、簡単に流れの様子を図示せよ。

1. $\phi = 2s$, ただし $s = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$

   上問の式に入れて計算するだけなので省略。流れ場は、(1,-2) から放射状に出て行く形になる

2. $\psi = x$

$\boxed{\text{上問の式に入れて計算するだけなので省略。流れ場は、一様になる}}$

3. $W = z^3$, ここで $z = x + iy$

上問の式に入れて計算するだけなので省略。流れ場は、60 度間隔で原点で交叉する直線で囲まれたそれぞれの範囲で、角を回る流れとなる。

4. $W = 2\left(z + \frac{1}{z}\right)$

上問の式に入れて計算するだけなので省略。流れ場は、円柱を過ぎる流れ