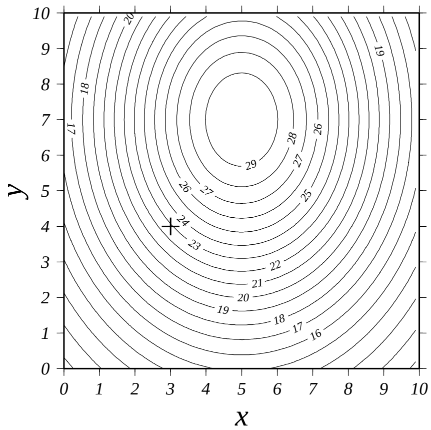
応用解析学 II 試験問題 (2005.6.9)

問題１ 以下の実空間内の計算をせよ。ここで、空間内の点は xyz 座標によって表され $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである。

(1) $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ (c_1, c_2, c_3 は定数)、$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の時、$\mathbf{c} \times \mathbf{r}$

(2) 下図の等値線で表される関数 $f(x, y)$ について $+$ 印の点 $(x, y) = (3, 4)$ での grad f の値 (手順も示せ)



(3) $\mathbf{a} = xyz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ の時、$\mathrm{div}\,\mathbf{a}$

(4) 同じ $\mathbf{a}$ に対して、$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

(5) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の時、$\mathrm{grad}\left(-\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)$

(6) $\mathbf{u} = x^2\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ の時、O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D(0,0,1), E(1,0,1), F(1,1,1), G(0,1,1) で囲まれる立方体の表面 S 上での面積分 $\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$。但し、$\mathbf{n}$ は表面 S 上の面要素 dS での外向き法線ベクトルである。

(7) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ の時、$x^2 + y^2 = 1$ かつ $z = 0$ の閉曲線 C を時計回りに一周する線積分 $\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}\, ds$。ここで、$\mathbf{t}$ は経路 C 上の線要素 ds での接線ベクトルである

(8) t をパラメータとするベクトル $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ で表される曲線上の点 (1,1) における曲率

問題２ 以下の複素数に関する問題に答えよ。ここで、i は虚数単位である。また e の実数乗や π の値など無理に数値に直す必要はない。

(1) $e^{\frac{8\pi}{3}i}$ の値を求めよ。

(2) $\log\left(1 + \sqrt{3}i\right)$ の値を求めよ。

(3) $z^2 = i$ となる z の値を求めよ。

(4) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^4}$ は複素微分可能かどうか示せ。