応用解析学 II テスト (2004.6.17)

問題1 以下の値を複素数の範囲で求めよ。 i は虚数単位である。また e の実数乗の値などを無理に数値に直す必要はない。

(1) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

(2) $\tan(i)$

(3) $\log\left(\sqrt{3}+i\right)$

(4) $z^3 = 8$ となる全ての z

問題2 以下の実空間内の計算をせよ。ここで、空間内の点は xyz 座標によって表され $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである。

(1) $f(x,y,z) = (\sin x)y^2 z$ の時、 $\mathrm{grad} f$

(2) $\boldsymbol{a} = (x^2-y^2)\boldsymbol{i} + (x^2-z^2)\boldsymbol{j} + (y^2-z^2)\boldsymbol{k}$ の時、$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$

(3) 同じ $\boldsymbol{a}$ に対して、$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$

(4) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の時、$\mathrm{grad}\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)$

(5) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で、$\boldsymbol{c} = c_0\boldsymbol{i} + c_1\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k}$ (c_1, c_2, c_3 は定数) の時、$\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$

(6) $\boldsymbol{u} = 7x\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{k}$ の時、$x^2+y^2+z^2 = 4$ の表面 S 上での面積分 $\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$。但し、$\boldsymbol{n}$ は表面 S 上の面要素 dS での外向き法線ベクトルである。

(7) $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の時、$x^2+y^2 = 1$ かつ $z = 0$ の閉曲線 C を時計回りに一周する線積分 $\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$。ここで、$\boldsymbol{t}$ は経路 C 上の線要素 ds での接線ベクトルである

問題3 複素数 z を虚部実部に分けて $z = x+iy$ とかく時、複素関数 $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$ は正則であることを示せ。もちろん i は虚数単位である。