応用解析学 II テスト (2004.6.17)

解答例 (タイプミスなどがありえるので、あくまでも参考として考えて欲しい)

問題 1 以下の値を複素数の範囲で求めよ。 i は虚数単位である。また e の実数乗の値などを無理に数値に直す必要はない。

(1) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

もっと整理してももちろん良い (以下も同様)。

(2) $\tan(i)$

$$\tan(i) = \frac{\sin(i)}{\cos(i)} = \frac{\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}}{\frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}} = \frac{1}{i}\frac{e^{-1}-e}{e^{-1}+e} = \frac{e^2-1}{e^2+1}i$$

(3) $\log\left(\sqrt{3}+i\right)$

$$\log\left(\sqrt{3}+i\right) = \log\left\{2e^{\frac{\pi}{6}+2n\pi}\right\} = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)$$

ここで、n は整数

(4) $z^3 = 8$ となる全ての z 簡単なので、答えのみ示す $z = 1, -1-\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i$

問題 2 以下の実空間内の計算をせよ。ここで、空間内の点は xyz 座標によって表され i, j, k はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである。

簡単なものは途中を省いて示す。実際の解答には答えを論理的に示す必要があるので注意。(まぁ、正しい答えだったらそれでいいことも多いんだけれど)

(1) $f(x,y,z) = (\sin x)y^2z$ の時、 $\mathrm{grad}f$

$$\mathrm{grad}f = (\cos x)y^2z\mathrm{i} + 2(\sin x)yz\mathrm{j} + (\sin x)y^2\mathrm{k}$$

(2) $\mathrm{a} = (x^2-y^2)\mathrm{i} + (x^2-z^2)\mathrm{j} + (y^2-z^2)\mathrm{k}$ の時、$\mathrm{div a}$

$$\mathrm{div a} = 2x - 2z$$

(3) 同じ a に対して、$\mathrm{rot a}$

$$\mathrm{rot a} = 2(x+z)\mathrm{i} + 2(x+y)\mathrm{k}$$

(4) $\mathrm{r} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ の時、$\mathrm{grad}\left(-\frac{1}{|\mathrm{r}|}\right)$

$$\mathrm{grad}\left(-\frac{1}{|\mathrm{r}|}\right) = \frac{\mathrm{r}}{r^3}$$

(5) $\mathrm{r} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ で、$\mathrm{c} = c_0\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + c_2\mathrm{k}$ (c_1, c_2, c_3 は定数) の時、$\mathrm{grad}(\mathrm{c} \cdot \mathrm{r})$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{c} \cdot \mathrm{r}) = \mathrm{c}$$

(6) $\mathrm{u} = 7x\mathrm{i} - 2z\mathrm{k}$ の時、$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の表面 S 上での面積分 $\iint_S \mathrm{u} \cdot \mathrm{n}\, dS$。但し、n は表面 S 上の面要素 dS での外向き法線ベクトルである。

ガウスの定理より $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 内を V とすると、

$$\iint_S \mathrm{u} \cdot \mathrm{n}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\mathrm{u}\, dV$$

と、V 内の体積積分に変換できる。ここで、

$$\mathrm{div}\mathrm{u} = 5$$

と定数になり、

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathrm{u}\, dV = 5 \iiint_V dV = \frac{160}{3}\pi$$

となる。(ここで球の体積の式を使った。不思議な事にこの部分の間違い: 半径が違ってたり、表面積にしてみたり、r^2 だったり、が多かった。)

(7) $\mathrm{v} = y\mathrm{i} - x\mathrm{j}$ の時、$x^2 + y^2 = 1$ かつ $z = 0$ の閉曲線 C を時計回りに一周する線積分 $\oint_C \mathrm{v} \cdot \mathrm{t}\, ds$。ここで、t は経路 C 上の線要素 ds での接線ベクトルである

ストークスの定理により

$$\oint_C \mathrm{v} \cdot \mathrm{t}\, ds = \iint_D \mathrm{rot}\mathrm{v} \cdot \mathrm{n}\, dS$$

と面積分に変換できる。ここで、S は C 内の領域を示し、 n は面要素 dS の法線ベクトルである。S は xy 平面上にあり、もともとの線積分が通常とは逆の時計回りであるので $n = -\mathrm{k}$ となる (k は z 方向の単位ベクトル)。また、$\mathrm{rot}\mathrm{v} = -2\mathrm{k}$ なので

$$\iint_D \mathrm{rot}\mathrm{v} \cdot \mathrm{n}\, dS = -2 \times (-1) \times (\mathrm{S}\ \text{の面積})$$

となり、与式 $= 2\pi$ となる。

問題 3 複素数 z を虚部実部に分けて $z = x + iy$ とかく時、複素関数 $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$ は正則であることを示せ。もちろん i は虚数単位である。

コーシー・リーマンの関係式を調べれば良い。$f(z)$ の実部を $u(x,y)$、虚部を $v(x,y)$ とすると、コーシー・リーマンの関係式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

であるので、後は計算するだけ。

今回の関数は、$f(z) = e^{-y+ix} = e^{iz}$ なので、「e^z が正則な関数だから、当然正則だ」と言う答えも可能である。