応用解析学 II テスト (2003.6.5)
解答例 (2003.6.23)

(タイプミスなどがあるかも知れないので適宜自分で確かめてください。)

問題 1 以下の値を求めよ。i は虚数単位である。

(1) $e^{(3-i\pi/2)}$

$$\begin{aligned} e^{(3-i\pi/2)} &= e^3\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -ie^3 \end{aligned}$$

(2) $\log(1+i)$

$$\begin{aligned} \log(1+i) &= \log\left\{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\log 2+i\left(\frac{1}{4}\pi+2n\pi\right) \end{aligned}$$

ここで、n は整数

(3) $z^2=-1+\sqrt{3}i$ の時の z

$$\begin{aligned} z^2 &= -1+\sqrt{3}i \\ &= 2e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)} \\ z &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{3}\pi+n\pi\right)} \end{aligned}$$

ここで、n は整数。だから

$$z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

問題２ $\mathbf{c}$ を定ベクトル ($\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, c_1, c_2, c_3 は定数、$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル) とし、$\mathbf{r}$ を位置ベクトル ($\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$) とする時、下記を求めよ。

(1) $\mathrm{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(c_2 z - c_3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_3 x - c_1 z) + \frac{\partial}{\partial z}(c_1 y - c_2 x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c_1, c_2, c_3 は定数であること、x, y, z はそれぞれ独立であることに注意)

(2) $\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{k}}{|\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}|^2}\right)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{k}}{|\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}|^2}\right) &= \mathrm{rot}\left(\frac{y\mathbf{i}-x\mathbf{j}}{x^2+y^2}\right) \\
&= 0\mathbf{i}+0\mathbf{j} \\
&\quad + \left\{\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2}^{2} - \frac{1}{x^2+y^2}\right\}\mathbf{k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(与式が定義できる $(x,y)\neq(0,0)$ で上の議論は有効である)

問題 3 原点を中心とした半径 R の球面上で、面積分 $\iint (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,dS$ (ここで、$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 、dS は球の表面の面要素、$\mathbf{n}$ は dS から球の外側へ向けた法線ベクトル) を求めたい。下記の 2 通りの方法で求めよ。

(1) そのまま面積分する。(ヒント: $\mathbf{n}$ は、実は $\mathbf{r}$ と平行で大きさが 1、つまり $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ である。)

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \\ &= |\mathbf{r}|\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\iint (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,dS &= \iint |\mathbf{r}|\,dS \\ &= \iint R\,dS \\ &= R(4\pi R^2) \\ &= 4\pi R^3\end{aligned}$$

ここで、球の表面積 $\iint dS = 4\pi R^2$ を使った。

(2) ガウスの定理を使って体積積分に変換して計算する

ガウスの定理を使って

$$\iint (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint \mathrm{div}\mathbf{r}\,dV$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{r} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= 1+1+1 \\ &= 3\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\iiint \mathrm{div}\mathbf{r}\,dV &= 3\iiint dV \\ &= 3\frac{4\pi R^3}{3} \\ &= 4\pi R^3\end{aligned}$$

となる。(ここで、球の体積 $\iiint dV = \frac{4\pi R^3}{3}$ を使った。)

問題 4 x-y 平面上に点 O (0,0) と点 A(1,1) があり、ベクトル場 $\mathbf{v} = 3y^2\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j}$ がある ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトル)。ここである経路に沿った線積分 $\int_O^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds$ を計算する時、以下の問いに答えよ。ここで、$\mathbf{t}$ は積分経路の接線ベクトル、ds は線要素である。

(1) 上記積分の値は実は経路に依らない。このことは、点 O から点 A へ、任意の 2 経路 path1 path2 を取り、点 O から点 A へ path1 に沿って移動し、点 A から点 O へ path2 を逆に移動する閉曲線上の線積分が 0 となることから分かる。そうなることを示せ。

点 O から経路 path1 を通って点 A に行き、点 A から 経路 path2 を逆に通って点 O に帰る経路を考える (path1 − path2 と表記する)。この経路は閉曲線をなす。

$$\int_{\text{path1}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds - \int_{\text{path2}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds = \oint_{\text{path1}-\text{path2}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds$$

また、この path1−path2 の閉曲線で囲まれた領域を D とすると

$$\oint_{\text{path1}-\text{path2}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds = \iint_{\text{D}} \text{rot}\mathbf{v}\,dS$$

とストークスの定理より領域 D での面積分となる (閉曲線の回る向きによって符号は逆になることがあるが、以下の計算の結果 0 となるので結論に影響しない)。ここで、

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{v} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}(6xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3y^2)\right\}\mathbf{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

なので、

$$\oint_{\text{path1}-\text{path2}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds = 0$$

となり、

$$\int_{\text{path1}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}) - \int_{\text{path2}} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds = 0$$

となるので、点 O から点 A への任意の 2 経路の線積分の値の差が 0 であることが分かる。したがって、積分の値は経路によらない。

(2) 実際に、線積分 $\int_O^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds$ を計算する。経路によらないのだから一番簡単な経路を選べば良いので、例えば点 B (1,0) として、点

O → 点 B → 点 A の経路で積分すると、前半は、$\mathbf{t} = \mathbf{i}$、後半は $\mathbf{t} = \mathbf{j}$ となることからたやすく計算できる。実際にこの手順で計算せよ。

$$\int_O^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds \;=\; \int_O^B (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds + \int_B^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds$$

まず、$\int_O^B (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds$ を考える。経路 OB では、$\mathbf{t} = \mathbf{i}$ で、$y = 0$ なので

$$\begin{aligned}\int_O^B (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds &= \int_O^B 3y^2 dx \\ &= 0\end{aligned}$$

次に、経路 BA では、$\mathbf{t} = \mathbf{j}$ かつ $x = 1$ なので

$$\begin{aligned}\int_B^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds &= \int_B^A 6xydy \\ &= \int_0^1 6ydy \\ &= [3y^2]_0^1 \\ &= 3\end{aligned}$$

したがって、

$$\int_O^A (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,ds = 0 + 3 = 3$$

となる。

問題 5 水平面に座標 (x, y) を取った時に、標高が $-\dfrac{1}{x^2+4y^2+1}$ と表せる窪地があるとする。点 (1,1) に、静止させて置いた球が転がり落ちる方向はどちら向きか。(x-y 面内のベクトルで答えよ。)

標高を H と表記する。勾配 grad$H$ は

$$\mathrm{grad}H \quad = \quad \frac{2x}{(x^2+4y^2+1)^2}\mathbf{i} + \frac{8y}{(x^2+4y^2+1)^2}\mathbf{j}$$

であるので、点 (1,1) では、

$$\mathrm{grad}H = \frac{1}{18}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j}$$

となる。これが最大傾斜方向を表すので、そこに球を置くとその反対の方向、つまり $-\frac{1}{18}\mathbf{i} - \frac{2}{9}\mathbf{j}$ へと落ちてゆく。
向きを問われているので、$(-1,-4)$ 方向とか、$(-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$ 方向と答えても良い。